| Nom en lettres MAJUSCULES | Prénom en lettres MAJUSCULES | Numéro d'identification |
| --- | --- | --- |
| | | |

# Introduction à l'algèbre linéaire (MAT-1200 Nrc 86094)
# Examen partiel 2 du 14 décembre 2023

**Durée 2h50.**

— Inscrivez votre nom, prénom en MAJUSCULE et le numéro d'identification aux endroits indiqués ci dessus.
— Veuillez éteindre vos téléphones. Déposez vos téléphones et vos montres intelligentes dans vos sacs.
— **Ce sujet comporte** 6 **questions sur** 13 **pages + deux feuilles de brouillon.**
— **Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées**
— Pour répondre aux questions, utilisez le recto des pages 2 à 13. Si vous manquez de place, utilisez le verso.
— Les deux dernières feuilles sont pour faire un brouillon. Vous les détachez du cahier de l'examen. Inscrivez votre nom sur chacune des feuilles. **Il faut les rendre à la fin de l'examen.**
— Documents admis : deux feuilles **manuscrites** 8 1/2 $\times$ 11, recto-verso.
— Seulement les calculatrices autorisées.
— Aucune sortie n'est autorisée pendant l'examen.

---

| | | |
| --- | --- | --- |
| Question 1 | : | /20 |
| Question 2 | : | /14 |
| Question 3 | : | /18 |
| Question 4 | : | /20 |
| Question 5 | : | /18 |
| Question 6 | : | /10 |

---

**TOTAL :** /100

**Question 1. (4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 points)**

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des questions suivantes. Justifier chacune de vos réponses.

a) On considère la matrice carrée d'ordre 5 telle que $M = (m_{ij})$ avec $m_{ij} = (3i \times j)^4$. Est-ce que la matrice $M$ est diagonalisable ?

b) Soient $A$ et $M$ deux matrices carrées d'ordre 4 telles que $\text{dét}(M) = -3$ et $\text{dét}\big[(M^2)(2A)(M^t)(M^{-1})^3\big] = 32$. Est-ce que $\text{dét}(A) = 16$ ?

c) On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, Est-ce que la solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est unique ?

d) $A$ est une matrice carrée d'orde 4 ayant les valeurs propres $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 0$ et $\alpha_4 = 5$. Est-ce que $A$ est non inversible ?

e) Si $\theta$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 0, -1)^t$ et $\vec{v} = (-2, 3, 1, 0)^t$, est-ce que $\cos\theta = \frac{2\sqrt{21}}{21}$ ?

**Question 2. (4+4+3+3=14 points)**

On considère la matrice

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que le déterminant de $B$ est égale à $-4$, justifier tous vos calculs.
b) Calculer le cofacteur $C_{15}$.
c) Calculer dét$(3B^3)$, dét désigne le déterminant.
d) On suppose qu'il existe une matrice $Q$ orthogonale et une matrice $M$ toutes les deux carrées d'ordre 5 telles que $Q^t(2M)Q = B$. Calculer le déterminant de la matrice $M$.

(Suite de la solution de la question 2)

**Question 3. (2+2+7+2+5=18 points)**

Soit l'ensemble $S = \{\vec{u}_1 = (1,-1,4)^t, \vec{u}_2 = (1,1,0)^t\}$ formé de deux vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note par $W$ le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $S$.

a) L'ensemble $S$ est-il orthogonal ?

b) Montrer que S forme une base de $W$.

c) Soit $\vec{u} = (10,-2,6)^t \in \mathbb{R}^3$ , calculer la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $W$.

d) Pourquoi $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (1,-1,4)^t, \vec{u}_2 = (1,1,0)^t, \vec{u} = (10,-2,6)^t\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ?

e) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}_1$ pour obtenir une base $\mathcal{B}_2$ orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

(Suite de la solution de la question 3)

**Question 4. (2+2+3+3+3+2+4+1=20 points)**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)^t$ est un vecteur propre de la matrice $A$ et déterminer la valeur propre $\alpha_1$ associée au vecteur $\vec{u}_1$.

b) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{u}_2 = (3, 0, 1)^t$ est un vecteur propre de la matrice $A$ et déterminer la valeur propre $\alpha_2$ associée au vecteur $\vec{u}_2$.

c) Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\alpha_1$.

d) Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\alpha_2$.

e) Quelle est la troisième valeur propre $\alpha_3$ de $A$ ?

f) En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.

g) Utiliser ce qui précède pour déterminez des matrice $P$ et $D$ telles que $A = PDP^{-1}$ avec $D$ une matrice diagonale. **Ne pas calculer la matrice $P^{-1}$.**

h) Déterminer la matrice $A^{2023}$.

(Suite de la solution de la question 4)

(Suite de la solution de la question 4)

**Question 5. (2+3+4+2+4+3= 18 points)**

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère $\mathcal{C} = \left\{\vec{i} = (1,0,0)^t, \vec{j} = (0,1,0)^t, \vec{k} = (0,0,1)^t\right\}$ la base canonique et $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (1,1,1)^t, \vec{u}_2 = (1,1,0)^t, \vec{u}_3 = (1,0,0)^t\}$ une autre base. Soit la transformation définie par

$$\begin{array}{rccl} T & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & \vec{u} = (x,y,z)^t & \longmapsto & (2y+z, x-4y, 3x)^t . \end{array}$$

a) Montrer que $T$ est linéaire.
b) Donner la matrice $A$ de $T$ dans la base canonique.
c) Déterminer Im$T$. Quelle est sa dimension ? En déduire Ker$T$.
d) Donner la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.
e) Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
f) Déterminer la matrice $M$ de $T$ lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont munis de la base $\mathcal{B}$.

(Suite de la solution de la question 5)

**Question 6. (2+2+3+3=10 points)**

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les points $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(3,-1)$, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et le triangle $OBA$. On note $\mathcal{C} = \left\{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer la matrice $M$ de la rotation $\mathcal{R}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du point $O(0,0)$ dans le sens anti-horaire.

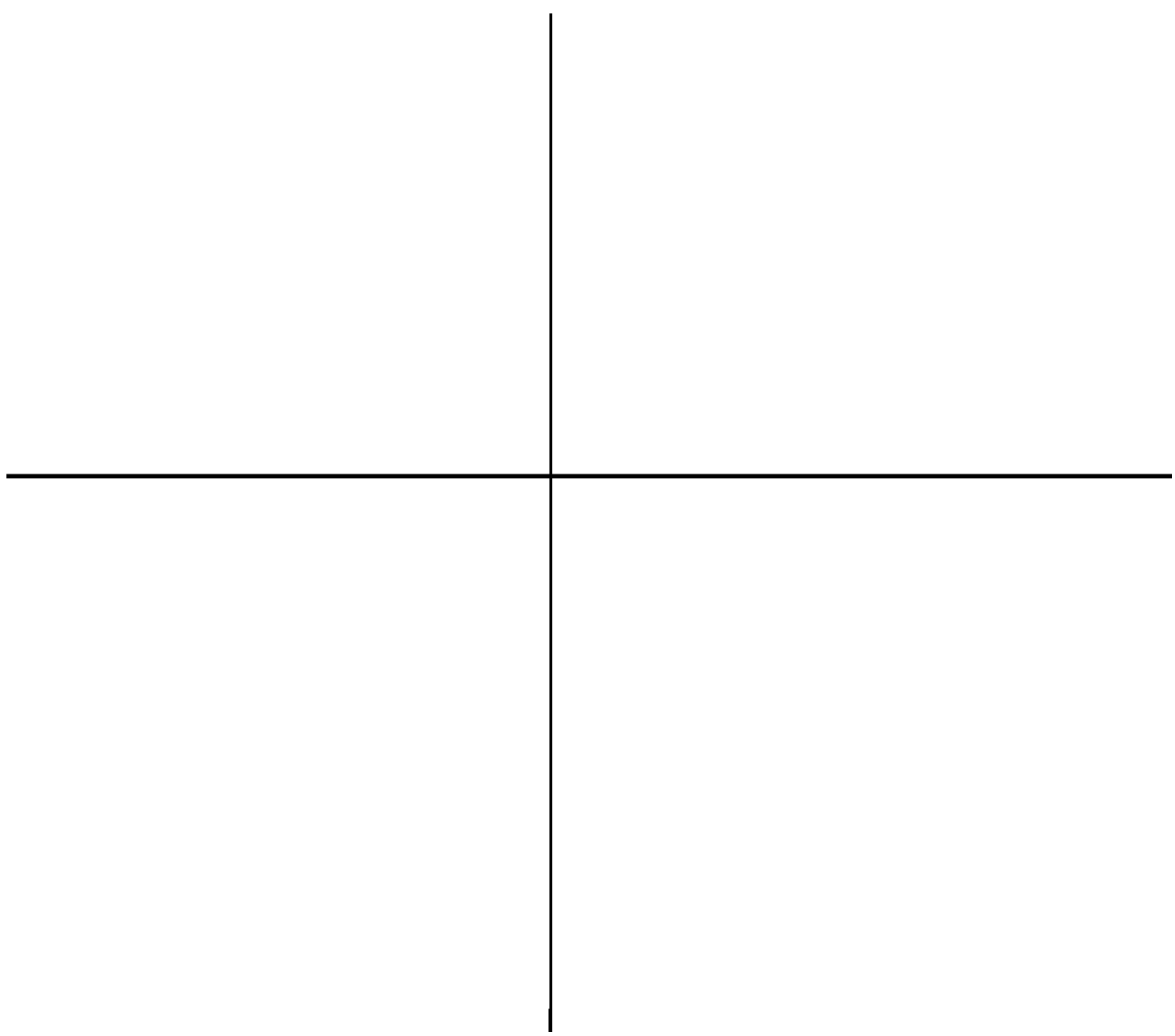
b) Déterminer la matrice $N$ de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe des abscisses $OX$ (c'est à dire la droite $y = 0$).

c) On considère la transformation géométrique $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ obtenue en tournant de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine dans le sens anti-horaire suivie de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = 0$. Déterminer la matrice de $\mathcal{T}$.

d) Sur le graphe à la page 13, représenter graphiquement le triangle $OBA$ et de son image par la transformation $\mathcal{T}$. On prendra pour unité sur chacun des axes $2cm$. On indiquera clairement l'image du triangle sur le graphe.

(Suite de la solution de la question 6)

Réponse de la sous-question d)



Feuille pour brouillon

**Nom** : ______________________________ **No d'identification** : ______________________________

**Prénom** : ______________________________

Feuille pour brouillon

**Nom** : ______________________________ **No d'identification** : ______________________________

**Prénom** : ______________________________